METODE INTERPOLASI *SPLINE* KUADRAT UNTUK PROSES *SMOOTHING DATABASE*

Dra. Dwi Achadiani, Yudi Santoso
Fakultas Teknologi Informasi - Universitas Budi Luhur Jakarta

ABSTRACT

Quadrate Interpolation Spline is one of method that can be use to approximate the set of point of data. The principle of Interpolation Spline to divice the interval into a collection of subintervals and contruct (generally) different polynomial on each subinterval. The polynomial coefficients are determined by solving a linier system.

Kata Kunci : Interpolasi Spline, Proses smoothing.

1. Pendahuluan

Interpolasi adalah suatu metode yang dapat digunkan untuk menetukan atau mengestimasi nilai yang diinginkan diantara sebuah kumpulan data yang dapat diandalkan ketelitiannya.

Sedangkan Interpolasi *Spline* adalah suatu metode yang dapat digunakan untuk memperhalus suatu fungsi dari sekumpulan titik data dari hasil pengamatan atau data-data lain yang mempunyai sifat yang sama. Fungsi hasil interpolasi Spline tersebut merupakan bentuk gambaran keseluruhan dari proses pengamatan yang mana seluruh perubahan data dapat diketahui secara mendetil dan kontinu.

Prinsip Iinterpolasi *Spline* adalah hampiran suatu fungsi f dengan polinom $P_n(x)$ pada interval $a \leq x \leq b$, dimana fungsi f adalah fungsi yang kontinu. Tujuan proses Interpolasi *Spline* adalah menurunkan polinomial-polinomial menjadi lebih rendah sehingga dapat melalui semua belokan titik-titik secara halus, sehingga osilasi fungsi yang terjadi dapat diminimalkan.

Spline matematika memiliki titik-titik data numerik dan koeffisien pada polinomial derajad tiga yang digunakan untuk menginterpolasi data. Koefisien-koefisien ini membelokkan garis sehingga melalui setiap titik data tanpa adanya perubahan yang mendadak, yang mempengaruhi proses normalisasi, atau patahan dalam kekontinuan.

1.2 Perumusan Masalah

Bagaimana Konsep Interpolasi *Spline* kuadrat dapat mencocokkan suatu polinomial terhadap data

1.3 Pembatasan Masalah

Permasalahan hanya dibatasi pada pembentukan persamaan kurva dua dimensi baru berdasarkan data-data yang tersedia dengan metode *spline*.

1.4 Tujuan Penulisan

Mengaplikasikan konsep interpolasi *spline* kuadrat untuk *smoothing* kurva.

ta

to approximate
interval into a
mial on each
system.

enetukan atau
a yang dapat

gunakan untuk
a atau data-data
but merupakan
perubahan data

polinom $P_n(x)$
Tujuan proses
lebih rendah
osilasi fungsi

oeffisien pada
isien-koefisien
erubahan yang
kontinuan.

cokkan suatu

a dua dimensi

g kurva.

2. Landasan Teori

2.1 Sistem Linier

Suatu persamaan linier dengan n peubah (variabel), adalah suatu persamaan dengan bentuk:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots\dots + a_nx_n = b \quad \text{.........................} \quad (2.1)$$

dengan $a_1, a_2, \dots\dots, a_n$ dan b adalah konstanta yang merupakan bilangan riil dan $x_1, x_2, \dots\dots, x_n$ merupakan peubah. Dengan demikian maka sistem persamaan linier dari m persamaan dengan n peubah adalah suatu sistem yang berbentuk :

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} + a_{mn}x_n = b_n \end{array}\right\} \text{.......} \ (2.2)$$

dimana a_{ij} dan b_i adalah konstanta yang merupakan bilangan-bilangan riil dan sistem tersebut disebut sistem persamaan linier $m \times n$.

2.2 Perkalian Matriks dan Sistem Persamaan Linier (SPL)

Sistem persamaan linier dengan satu perubah, dapat disajikan dalam bentuk:

$$a\,x = b \quad \text{..................................} (2.3)$$

pada umumnya a, x, dan b dianggap sebagai skalar-skalar , tapi dapat juga disajikan dalam bentuk matrks, yaitu:

$$A\,X = B \quad \text{..................................} (2.4)$$

dimana A adalah matriks ukuran $m \times n$, X dalam R^n, dan B dalam R^m.

Sistem persamaan dengan m persamaan dan n peubah (persamaan (2.3)), dapat disajikan dalam bentuk matriks $A\,X = B$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\ \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\ \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\ \dots\dots & \text{---} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\ \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \text{..........} \ (2.5)$$

Atau $A\,X = B$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots\ \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots\ \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots\dots\ \dots\dots & \text{---} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots\dots\ \dots\dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \text{..................................} (2.6)$$

sistem persamaan linier (2.3) sama dengan persamaan matriks (2.6).

2.3 Operasi Baris Elementer (OBE)

Prinsip operasi baris elementer (OBE) adalah menggunakan tehnik eliminasi, prinsip di dalam OBE adalah merubah suatu sistem persamaan linier menjadi sistem persamaan linier yang lain yang setara, dengan:

1. Mengalikan sebuah persamaan dengan konstanta tidak nol.
2. Menukar letak dua buah persamaan.
3. Menambahkan kelipatan sebuah persamaan ke persamaan lain.

Dalam operasi baris elementer (OBE) menjadi:

1. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tidak nol.
2. Menukar letak dua baris.
3. Menambahkan kelipatan sebuah baris ke baris lainnya.

2.4 Eliminasi Gauss-Jordan

Prosedur eliminasi Gauss-Jordan adalah untuk mereduksi matriks menjadi bentuk eselon baris tereduksi dari matriks yang diperbesar (*augmented matrix*). Matriks yang berbentuk eselon baris tereduksi (*reduced row-echelon form*) harus bersifat:

1. Jika pada suatu baris matriks, dengan tidak semua unsurnya nol, maka bilangan tidak nol pertama dalam baris tersebut dibuat sama dengan 1 (satu), dengan menggunakan OBE, dan dinamakan 1 (satu) utama.
2. Jika terdapat baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris tersebut dikelompokkan bersama-sama dibagian bawah matriks.
3. Pada sebarang dua baris matriks berurutan yang seluruhnya tidak terdiri dari nol, maka 1 (satu) utama dalam baris yang lebih rendah, letaknya lebih jauh ke kanan dari 1 (satu) utama baris yang lebih tinggi.
4. Setiap kolom yang mengandung 1 (satu) utama mempunyai elemen nol di tempat lain.

Suatu bentuk matriks yang hanya mempunyai sifat 1, 2, dan 3 dikatakan matriks tersebut merupakan bentuk eselon baris (*row-echelon form*).

Contoh 2.1

di bawah ini adalah matriks-matriks yang merupakan bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Matrik-matriks di bawah ini merupakan bentuk eselon baris

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linier (SPL) dapat dinyatakan dengan menuliskan koefisien-koefisien dan konstanta-konstanta dalam bentuk matriks, seperti berikut:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (2.7)$$

Bentuk matriks yang diperbesar (*augmented matrix*) nya adalah

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots\ldots\ \ldots\ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.8)$$

Contoh 2.2:

Diberikan suatu sistem persamaan linier (SPL):

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3 \\ x + y + z &= 1 \\ x - 2y - 3z &= 4 \end{aligned}$$

Jawab:

SPL di atas diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$ 2 kali baris kedua ditambah -1 kali baris pertama

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$ 2 kali baris ketiga ditambah -1 kali baris pertama

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$ 1 kali baris ketiga ditambah 5 kali baris kedua

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$ Baris ketiga dibagi dikalikan 1/2

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 1 kali baris kedua ditambah -1 kali baris ketiga

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 1 kali baris pertama ditambah -1 kali baris ketiga

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ 1 kali baris pertama ditambah -1 kali baris kedua

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Baris pertama dikalikan1/2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jadi hasil penyelesaian SPL di atas adalah; $x = 2$, $y = -1$ dan $z = 0$

2.5 Interpolasi

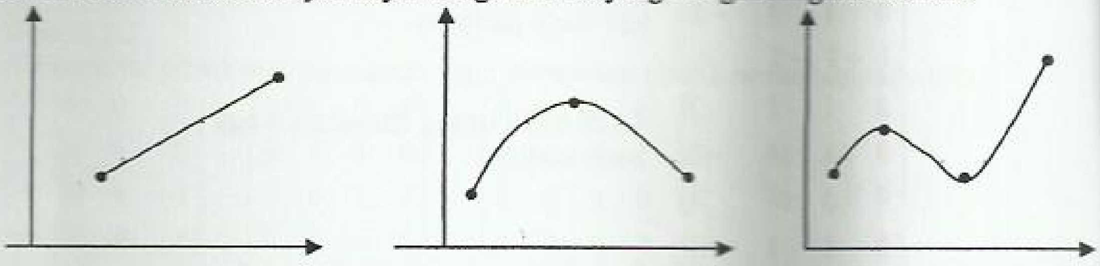
Interpolasi adalah metode yang digunakan untuk menaksir suatu harga diantara titik-titik data yang ada. Misalkan diketahui beberapa pasangan data, yaitu (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)..............(x_n, y_n), dimana x_1 terletak diantara $x_0, x_2, \ldots\ldots, x_n$.

Untuk menaksir harga-harga tengahan diantara titik-titik data yang telah tepat sering digunakan metode interpolasi polinomial, dimana dalam prosesnya metode ini menggunakan fungsi polinomial dalam menaksir harganya. Formula umum untuk polinomial orde ke-n adalah:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.9)$$

Dimana $a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, a_n$ suatu konstanta dan $a_n \neq 0$.

Untuk n+1 titik-titik data, terdapat satu polinomial orde ke n atau kurang yang melewati semua titik. Misalnya hanya satu garis lurus yang menghubungkan dua titik.



Gambar 2.1 Polinomial yang menghubungkan titik-titik

Ada beberapa cara yang digunakan untuk menyatakan bentuk polonomial salah satunya adalah metode interpolasi *Spline*.

2.6.1 Interpolasi Linier

Interpolas
ada dua pasang t
pasang titik terseb

Koefisien a_0 d
mensubtitusikan
persamaan linier:

Persamaan di atas

Setelah didapatk
maka diperoleh:

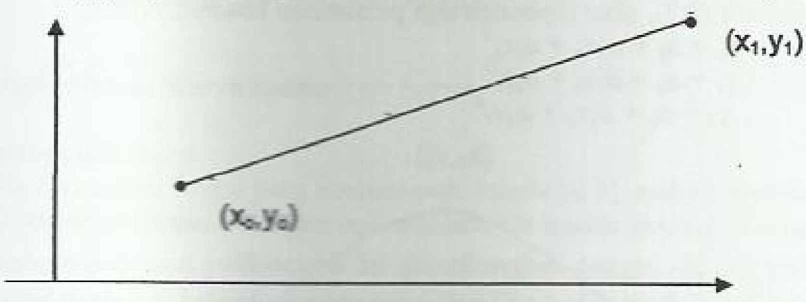
Persamanan di at

2.6.2 Interpol

Interpola
lengkung. Jika a
menginterpolasi
berbentuk:

Interpolasi linier adalah interpolasi dua buah titik dengan sebuah garis lurus. Jika ada dua pasang titik (x_o, y_o) dan (x_1, y_1), maka polinom yang menginterpolasi kedua pasang titik tersebut adalah persamaan garis lurus yang berbentuk

$$f(x) = y = a_o + a_1x \quad \text{.......................................} (2.9)$$



Gambar 2.2 Kurva Interpolasi Linier

Koefisien a_o dan a_1 didapat dari proses subtitusi dan eliminasi, dan dengan mensubtitusikan (x_o, y_o) dan (x_1, y_1) ke dalam persamaan (2.1), maka diperoleh dua persamaan linier:

$$y_o = a_o + a_1x_o$$
$$y_1 = a_o + a_1x_1 \quad \text{..............................} (2.10)$$

Persamaan di atas diselesaikan dengan proses eliminasi, dan diperoleh:

$$a_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \quad \text{dan} \quad a_1 = \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0} \quad \text{................} (2.11)$$

Setelah didapatkan harga a_o dan a_1, dan harga tersebut dimasukkan ke persamaan (2.1), maka diperoleh:

$$f(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + \frac{x_1y_0 - x_0y_1}{x_1 - x_0}x \quad \text{.......................................} (2.12)$$

Persamanan di atas dapat disederhanaka, maka diperoleh:

$$f(x) = y_o + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \quad \text{.......................................} (2.13)$$

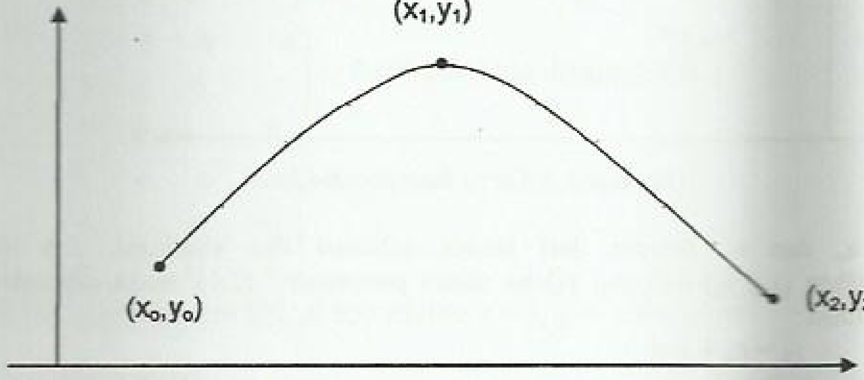
2.6.2 Interpolasi Kuadratik

Interpolasi kuadratik adalah interpolasi tiga buah titik dengan sebuah garis lengkung. Jika ada tiga pasang titik (x_o, y_o),(x_1, y_1) dan (x_2, y_2), maka polinom yang menginterpolasi ketiga pasang titik tersebut adalah persamaan garis lengkung yang berbentuk:

$$f(x) = y = a_o + a_1x + a_2x^2 \quad \text{.......................................} (2.14)$$

Dengan cara yang sama dengan interpolasi linier, koefisien a_o , a_1 dan a_2 didapat dengan proses substitusi dan eliminasi, dan denganmensubtitusikan (x_o, y_o),(x_1, y_1) dan (x_2, y_2) ke dalam persamaan (2.7), akan diperoleh tiga persamaan kuadrat, yaitu:

$$y_o = a_o + a_1 x_o + a_2 x_o^2$$
$$y_1 = a_o + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 \quad \text{...} \quad (2.15)$$
$$y_2 = a_o + a_1 x_2 + a_2 x_2^2$$



Gambar 2.3 kurva interpolasi Kuadratik

2.6.3 Polinom *Langrange*

Diberikan suatu bentuk persamaan linier:

$$f(x) = y_o + \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}(x - x_0) \quad \text{.....................................} (2.18)$$

Persamaan tersebut di atas dapat diubah menjadi:

$$f(x) = y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \quad \text{..............................} \quad (2.19)$$

atau dapat pula dinyatakan sebagai:

$$f(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) \quad \text{...} \quad (2.20)$$

Dengan:

$$a_0 = y_0, \quad L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \qquad \text{dan} \qquad a_1 = y_1, \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

Persamaan (2.20) disebut Polinom Langrange derajat 1.

Bentuk umum dari polinom Langrange derajat n untuk n+1 titik yang berbeda adalah:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i L_i(x) = a_0 L_0(x) + a_1 L_1(x) + \text{...........} + a_n L_n(x) \quad \text{.............} \quad (2.20)$$

dengan: $a_i = y_i$, $i = 1,2,3,4 \ldots\ldots\ldots n$ dan

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)(x_i - x_2)\ldots(x_i - x_{i-1})\ldots\ldots(x_i - x_n)}$$

3. Pembentukan Kurva *Spline*

3.1 Interpolasi *Spline*

Bila f(x) adalah fungsi yang kontinu pada interla [a, b], maka interpolasi *Spline* fungsi f(x) adalah potongan-potongan polinom berorde n pada masing-masing sub selang [a, b]. Potongan-potangan polinomnya ini dilambangkan dengan $S_k^n(x)$ yaitu polinom-polinom penginterpolasi berorde n pada sub selang ke-k dimana k = 1,2,3,4,..............m, Selanjutnya polinom $S_k^n(x)$ ini disebut polinim *Spline*.

Langkah-langkah membentuk pilonom Spline $S_k^n(x)$ adalah:

1. Membagi selang [a,b] menjadi sub-sub selang yang sesuai dengan data yang diketahui, yaitu $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b$ .... (3.1)
   Sebanyak m + 1 titik data.
2. Kemudian pada sub selang tersebut akan diperoleh suatu bentuk polinom $S_k^n(x)$ yang mengaproksimasikan f(x) pada sub selang yang diamati.

Aproksimasinya dapat dinyatakan dalam bentuk:

$S^n(x_0) = f(x_0)$, $S^n(x_1) = f(x_1)$, ..., $S^n(x_m) = f(x_m)$ .... (3.2).

Susunan polinom-polinom spline $S_k^n(x)$ dilambangkan oleh $S^n(x)$ yaitu:

$$S^n(x) = \begin{cases} S_1^n(x) & x_0 \le x \le x_1 \\ S_2^n(x) & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \\ S_{k+1}^n(x) & x_k \le x \le x_{k+1} \\ \vdots & \\ S_{m-1}^n(x) & x_{m-2} \le x \le x_{m-1} \\ S_m^n(x) & x_{m-1} \le x \le x_m \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.3)$$

3.1.1. *Spline Linier*

Hubungan yang paling sederhana diantara dua titik adalah sebuah garis lurus. Polinom *spline* linier merupakan polinom interpolasi berderajat satu. *Spline* orde pertama untuk sekumpulan titik data dapat didefinisikan sebagai sekumpulan fungsi linier yang menghubungkan titik-titik tersebut.

Polinom ini diturunkan langsung dari polinom *Langrange* yang berupa kumpulan potongan kurva linier.

Misal : $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \ldots\ldots\ldots, f(x_{m-1}), f(x_m)$ adalah nilai f yang bersesuaian dengan $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_{m-1}, x_m$, sebanyak m+1 titik data, dan $a \leq x \leq b$ adalah selang yang diamati, dengan $a = x_0$ dan $b = x_m$.
Polinom interpolasi *Langrange* menyatakan bahwa:

$$S_k^n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)\text{, dimana } L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Jika n = 1, maka:

$$S^1(x) = \sum_{i=0}^{1} L_i(x) f(x_i) = L_0(x)\, f(x_0) + L_1(x)\, f(x_1)\text{, dengan}$$

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\ ,\ L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\text{ , sehingga}$$

$$S^1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

Dan setiap potongan interpolasi berlaku:

$$S^1(x) = \frac{x - x_k}{x_{k-1} - x_k} f(x_{k-i}) + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f(x_k)\ ;\quad x_{k-1} \leq x \leq x_k,\ k = 1,2,3,\ldots..,m$$

$$= \frac{x_k - x}{x_k - x_{k-1}} f(x_{k-1}) + \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} f(x_k)$$

$$= \frac{(x_k - x) f(x_{k-1}) + (x - x_{k-1}) f(x_k)}{x_k - x_{k-1}}$$

$$= \frac{x_k f(x_{k-1}) - x f(x_{k-1}) + (x f(x_k) - x_{k-1} f(x_k)}{x_k - x_{k-1}}$$

$$= \frac{x_k f(x_{k-1}) - x_{k-1} f(x_{k-1}) - x f(x_{k-1}) + x f(x_k) - x_{k-1} f(x_k) + x_{k-1} f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$= \frac{f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}(x - x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$= f(x_{k-1}) + \frac{\{f(x_k) - f(x_{k-1})\}}{x_k - x_{k-1}} (x - x_{k-1})$$

Atau

$$S_k^n(x) = f(x_{k-1}) + r_{k-1}(x - x_{k-1})\text{, untuk } x_{k-1} \leq x \leq x_k$$

dengan: $$r_{k-1} = \frac{\{f(x_k) - f(x_{k-1})\}}{x_k - x_{k-1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4)$$

Persamaan (4.4) disebut *slope/gradient* garis lurus yang menghubungkan titik-titik. Sehingga persamaan polinom *spline* linier (4.3) dapat dituliskan menjadi:

$$S^n(x) = \begin{cases} f(x_0)+r_0(x-x_0) & x_0 \le x \le x_1 \\ f(x_1)+r_1(x-x_1) & x_1 \le x \le x_2 \\ \vdots & \\ f(x_k)+r_k(x-x_k) & x_k \le x \le x_{k+1} \\ \vdots & \\ f(x_{m-2})+r_{m-2}(x-x_{m-2}) & x_{m-2} \le x \le x_{m-1} \\ f(x_{m-1})+r_{m-1}(x-x_{m-1}) & x_{m-1} \le x \le x_m \end{cases} \qquad \text{.........................} (3.5)$$

Metode *spline* ini identik dengan interpolasi linier.

Contoh 3.1:

Diberikan suatu pasangan data:

i	x_i	y_i
1	5.6	10.0
2	7.1	10.7
3	9.0	11.7
4	10.0	11.9
5	11,2	11,7
6	14,2	11,1

Yang akan diinterpolasikan dengan menggunakan metode *spline* linier.

Jawab:

Dicari gradient setiap bagian:

$$r_1 = \frac{10.7-10.0}{7.1-5.6} = 0.46667 \qquad r_2 = \frac{11.7-10.7}{9.0-7.1} = 0.52632$$

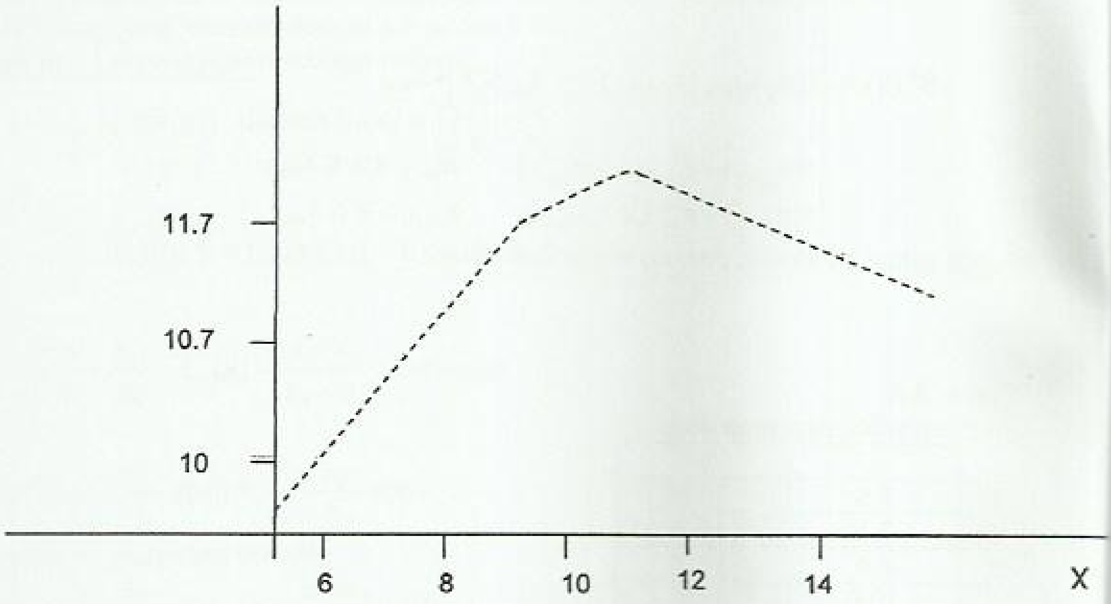
$$r_3 = \frac{11.9-11.7}{10.0-9.0} = 0.2 \qquad r_4 = \frac{11.7-11.9}{11.2-10} = -0{,}16667$$

$$r_5 = \frac{11.1-11.7}{14.2-11.2} = -0.2$$

Jadi persamaan polinom *spline* liniernya

$$S(x) = \begin{cases} 10.0+0.46667(x-5.6) & 5.6 \le x \le 7.1 \\ 10.7+0.52632(x-7.1) & 7.1 \le x \le 9 \\ 11.7+0.2(x-9.0) & 9 \le x \le 10 \\ 11{,}9-0{,}16667(x-10) & 10 \le x \le 11{,}2 \\ 11{,}7-0{,}2(x-11{,}2) & 11{,}2 \le x \le 14{,}2 \end{cases}$$

dan bentuk kurvanya adalah



Gambar 3.1. Kurva Spline Linier

3.1.2 *Spline* Kuadratik

Kurva pada *spline* adalah berupa segman garis, sehingga turunan pertamanya tidak kontinu pada simpul-simpulnya. Untuk memperbaiki ketidakkontinuan *spline* linier, maka digunakan interpolasi dengan memakai orde derajat dua, yang disebut dengan *spline* kuadrat atau *spline* orde dua.

Tujuan spline adalah untuk menurunkan sebuah polinomial orde kedua untuk setiap interval diantara titik-titik data. Polinomial untuk setiap interval secara umum dapat dinyatakan sebagai:

$$S_k^2(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k \qquad x_{k-1} \le x \le x_k \text{ .... (3.6)}$$

dimana k = 1, 2, 3,........,m.

Untuk m + 1 titik data akan terdapat m interval, sehingga terdapat 3m konstanta yang tidak diketahui yang akan dihitung. Karenanya ada 3m persamaan atau kondisi yang dibutuhkan untuk menghitung konstanta-konstanta tersebut.

Kondisi-kondisi ini adalah:

1. Nilai-nilai fungsi harus sama pada simpul-simpul terdalam. Kondisi ini dapat dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned} a_{k-1}x_{k-1}^2 + b_{k-1}x_{k-1} + c_{k-1} &= f(x_{k-1}) \\ a_k x_{k-1}^2 + b_k x_{k-1} + c_k &= f(x_{k-1}), \qquad k = 2,3,4,\text{..................}m \end{aligned} \quad \text{... (3.7)}$$

   Karena yang dipakai hanya simpul-simpul kuadrat terdalam, maka masing-masing memberikan m – 1 kondisi, sehingga terdapat 2 (m – 1) kondisi.

2. Fungsi pertama dan terakhir harus melalui titik-titik ujung. Ini akan menambahkan dua persamaan, yaitu:

$$\begin{aligned} a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 &= f(x_0) \\ a_mx_m^2 + b_mx_m + c_m &= f(x_m) \end{aligned} \quad \text{...(3.8)}$$

Sehingga keseluruhan terdapat 2 (m – 1) + 2 = 2m kondisi.

3. Turunan-turunan pertama pada simpul-simpul terdalam harus sama. Turunan pertama dari persamaan (3.6) adalah

$$f_k'(x) = 2a_kx + b_k, \qquad x_{k-1} \le x \le x_k$$

Secara umum kondisi ini dapat dinyatakan sebagai:

$$2a_{k-1}x_k + b_{k-1} = 2a_kx + b_k, \qquad k = 2,3,4,\ldots\ldots, m \ \text{.................(3.9)}$$

Ini memberikan m – 1 kondisi lainnya. Jadi keseluruhan ada 2m + m – 1 = 3m – 1 kondisi. Karean adiperlukan 3m kondisi, maka kurang satu kondisi lagi. Kondisi ini ditentukan dengan mengasumsikan bahwa turunan kedua adalah nol pada titik pertama.

Karena turunan kedua dari persamaan (3.6) adalah $2a_k$, maka kondisi ini dapat dinyatakan sebagai:

$$a_1 = 0 \quad \text{...(3.10)}$$

Contoh 3.2.

Diberikan suatu pasangan titik

i	x_i	y_i
1	5.6	10.0
2	7.1	10.7
3	9.0	11.7
4	10.0	11.9

Yang akan diinterpolasikan dengan menggunakan metode *spline* kuadratik.

Jawab:

Untuk masalah yang dihadapi, memiliki enam titik data dan lima interval, sehingga , 3(3) = 9 koefisien yang harus ditentukan, dan dari persamaan (3.7) didapatkan 2(3 - 1) = 4 kondisi, yaitu:

$$50{,}41a_1 + 7{,}1b_1 + c_1 = 10{,}7$$

$$50{,}41a_2 + 7{,}1b_2 + c_2 = 10{,}7$$

$$81a_2 + 9{,}0b_2 + c_2 = 11{,}7$$

$$81a_3 + 9{,}0b_3 + c_3 = 11{,}7$$

Dari persamaan (3.8) diperoleh 2 kondisi:

$$31{,}361a_1 + 5{,}6b_1 + c_1 = 10$$

$$100a_3 + 10b_3 + c_3 = 11{,}9$$

Dari persamaan (3.9) diperoleh 2 kondisi:

$14{,}2a_1 + b_1 = 14{,}2a_2 + b_2$

$18{,}0a_2 + b_2 = 18{,}0a_3 + b_3$

Dan terakhir dari persamaan (3.10) diketahui bahwa $a_1 = 0$

Persamaan-persamaan di atas dapat disusun menjadi suatu bentuk sistem persamaan linier, yaitu

$$
\begin{aligned}
50{,}41a_1 + 7{,}1b_1 + c_1 &= 10{,}7\\
50{,}41a_2 + 7{,}1b_2 + c_2 &= 10{,}7\\
81a_2 + 9{,}0b_2 + c_2 &= 11{,}7\\
81a_3 + 9{,}0b_3 + c_3 &= 11{,}7\\
31{,}361a_1 + 5{,}6b_1 + c_1 &= 10\\
100a_3 + 10b_3 + c_3 &= 11{,}9\\
14{,}2a_1 + b_1 &= 14{,}2a_2 + b_2\\
18{,}0a_2 + b_2 &= 18{,}0a_3 + b_3\\
a_1 &= 0
\end{aligned}
$$

Setelah disubtitusikan, menjadi :

$$
\begin{aligned}
7{,}1b_1 + c_1 &= 10{,}7\\
50{,}41a_2 + 7{,}1b_2 + c_2 &= 10{,}7\\
81a_2 + 9{,}0b_2 + c_2 &= 11{,}7\\
81a_3 + 9{,}0b_3 + c_3 &= 11{,}7\\
5{,}6b_1 + c_1 &= 10\\
100a_3 + 10b_3 + c_3 &= 11{,}9\\
b_1 - 14{,}2a_2 - b_2 &= 0\\
18{,}0a_2 + b_2 - 18{,}0a_3 - b_3 &= 0
\end{aligned}
$$

Bentuk matriknya adalah:

$$
\begin{pmatrix}
7{,}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 50{,}4 & 7{,}1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 81 & 9{,}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9{,}0 & 1\\
5{,}6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 10 & 1\\
1 & 0 & -14{,}2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 18{,}0 & 1 & -18{,}0 & -1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} b_1\\ c_1\\ a_2\\ b_2\\ c_2\\ a_3\\ b_3\\ c_3 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 10{,}7\\ 10{,}7\\ 11{,}7\\ 11{,}7\\ 10\\ 11{,}9\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}
$$

Dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan, maka didapatkan

$_{i}= 0$
jadi suatu bentuk sistem

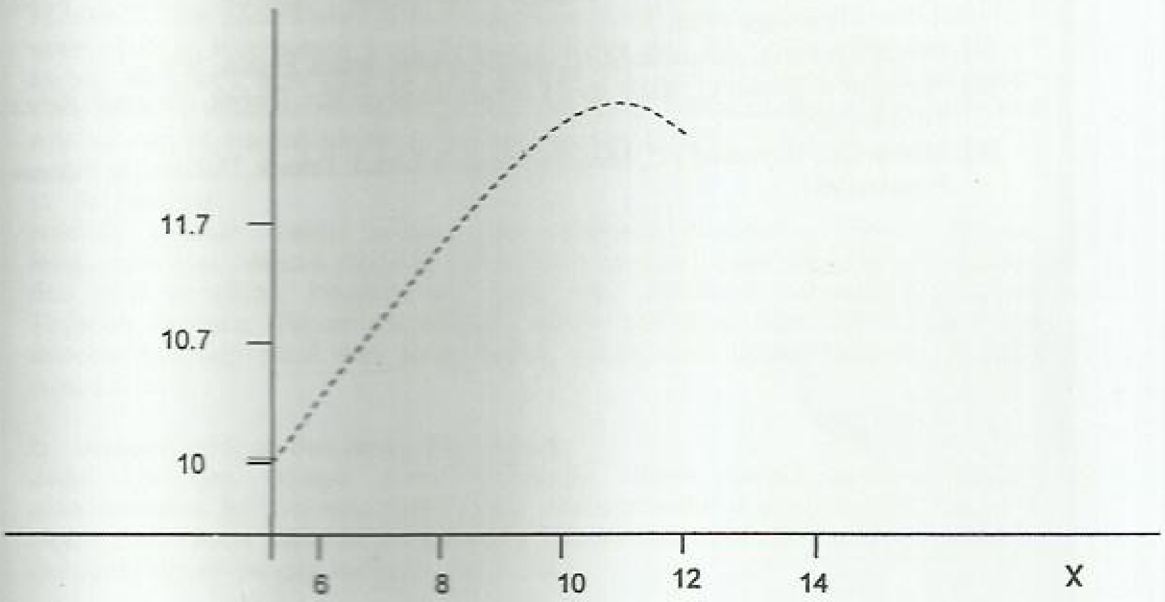
$$\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,7 \\ 10,7 \\ 11,7 \\ 11,7 \\ 10 \\ 11,9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

didapatkan

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 7,1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4666667 \\ 0 & 0 & 50,4 & 7,1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7,3866667 \\ 0 & 0 & 81 & 9,0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0,0313943 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 81 & 9,0 & 1 & 0,0208680 \\ 5,6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8,9692519 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 100 & 10 & 1 & -0.385964 \\ 1 & 0 & -14,2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7,5333332 \\ 0 & 0 & 18,0 & 1 & -18,0 & -1 & 0 & 0 & -24,836841 \end{array}\right)$$

Jadi Polinom *Spline* kuadratiknya adalah

$$S(x) = \begin{cases} 0,4666667x + 7,3866667 & 5.6 \le x \le 7.1 \\ 0,0313934x^2 + 0,0208680x + 8,9692519 & 7.1 \le x \le 9 \\ -0,385964x^2 + 7,5333332x - 24,836841 & 9 \le x \le 10 \end{cases}$$



Gambar 3.2. Kurva Spline Kuadratik

4. Kesimpulan

Berdasarkan dari hasil pembahasan maka dapat disimpilkan sebagai berikut:

1. Persamaan Polinom *Spline S(x)* yang ide pokoknya didasarkan pada sebuah alat bantu gambar, ternyata dapat digunakan sebagai pembentukkan kurva mulus yang dapat diaplikasikan pada pembentukan animasi gambar.

2. Pembentukkan kurva *spline* adalah gabungan dari potongan-potonga polinom spline berorde n pada masing-masing sub selang dan hasi pembentukkan kurva tersebut sangat tergantung pada kehalusan dalan pembagian sub selangnya dan penentuan titik-titik yang akan diinterpolasi.
3. Koefisien-koefisien a_i , b_i , dan c_i dengan i = 1,2,3,........,m persaman polinon spline kuadratik, pada tiap-tiap selang didapat dari penurunan rumu interpolasi *spline* dengan bedasarkan tiga sifat:
   - *S(x)* menginterpolasi titik (x_i, y_i), i = 1, 2, 3, ..., m
   - *S(x)* kontinu pada (x_1 , x_m)
   - *S'(x)* kontinu pada (x_1 , x_m)

   Penurunan rumus dari tiga sifat ini, menghasilkan m - 1 persamaan linie untuk m koefisien b_1, b_2, ..., b_m. Satu persamaan tambahan diberikan pad masing-masing jenis *spline*. Dan dalam penulisan ini digunakan jenis *splin* alamiah (*Natural Spline*) dengan satu batasan $S'(x_1) = 0$.
4. Dengan menggunakan metode interpolasi *spline* kuadrat maka gambar kurv menjadi lebih halus.

5. Daftar Pustaka

[1]. Anton Howard, Chris Rorres, *Penerapan Aljabar Linier*, Penerbit Erlangga 1988.
[2]. Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mahtematics*, Eighth, Wiley
[3]. Seymour Lipschutz, Marc lars Lipson, *Matematika Diskrit*, Penerbit Salemba Teknik 2004.
[4]. Steven CC, Raymond PC, Metode Numerik Untuk Teknik, Universitas Indonesia. Jakarta 1991.